# INTEGRALES CURVILIGNES

~

Classification Thèmes de MégaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

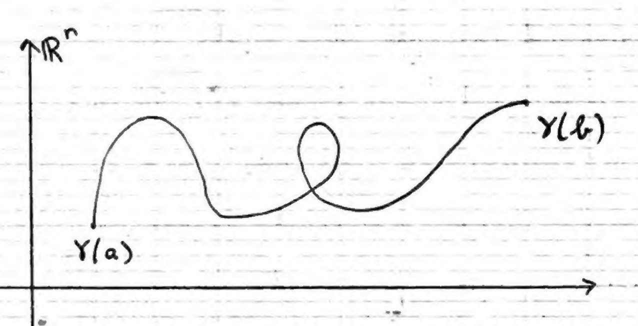
9 Les intégrales curvilignes

Arc paramétré, arc géométrique

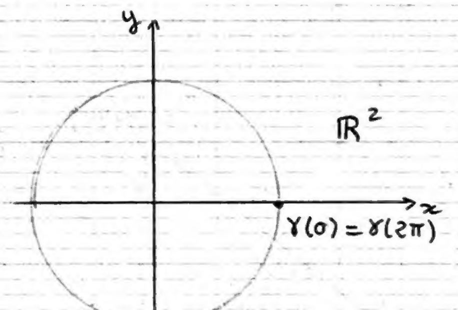
Arc paramétré :

$t \in [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$

$\gamma$ de classe $C^1$




ex d'arc paramétré : $t \in [0, 2\pi] \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \gamma(t) \in \mathbb{R}^2$




Fonction $C^1$ par morceaux : on peut faire une partition de l'intervalle $[a,b]$ de définition où $\gamma$ est $C^1$ sur chacun des sous-intervalles.

$[$ ——|——|————|—— $]$

$a = t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \quad b = t_5$

Dans l'exemple ci-dessus :

$s \in [0, \pi] \xrightarrow{\beta} \begin{pmatrix} \cos 2s \\ \sin 2s \end{pmatrix}$

**Def**

Deux arcs paramétrés $t \in [a,b] \longrightarrow \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$

$s \in [c,d] \longrightarrow \beta(s) \in \mathbb{R}^n$

de classe $C^1$ sont équivalents ($\sim$) s'il existe une bijection de classe $C^1$

$$\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & [c,d] \\ t & \longmapsto & s(t) \end{array}$$

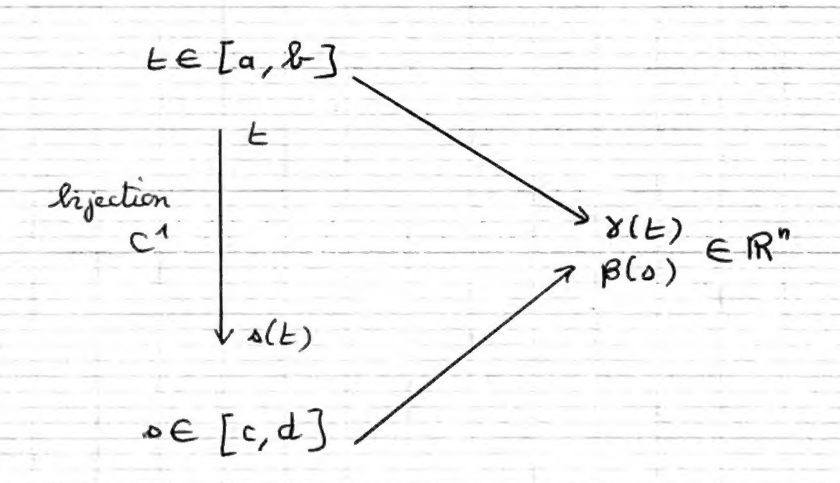
tel que

$$\gamma(t) = \beta \circ s\,(t) \quad \text{sur } [a,b]$$

Dans l'exemple du cercle :

$$\begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ t & \longmapsto & s = \frac{t}{2} \end{array}$$

Diagramme parlant :




Remarque : $\gamma(t(s)) = \beta(s)$.

Même image dans $\mathbb{R}^n$.

Par définition on appelera arc géométrique de classe $C^1$ une classe d'équivalence de cette relation $\sim$ (entre les arcs paramétrés).

Remarquons que nous aurons $s'(t) > 0 \ \forall t$ ou $s'(t) < 0 \ \forall t$.
On est conduit à définir la relation :

$\sim$ avec m̂ orientation.

$s$ = $C^1$- difféomorphisme

**Def** $\gamma$ et $\beta$ sont " $\sim$ avec même orientation" s'il existe $s : t \in [a,b] \mapsto s(t) \in [c,d]$ de classe $C^1$ ainsi que son inverse et strictement croissante, c.à.d $s'(t) > 0 \quad \forall t \in [c,d]$
Les classes d'équivalence sont appelées "arcs géométriques orientés".

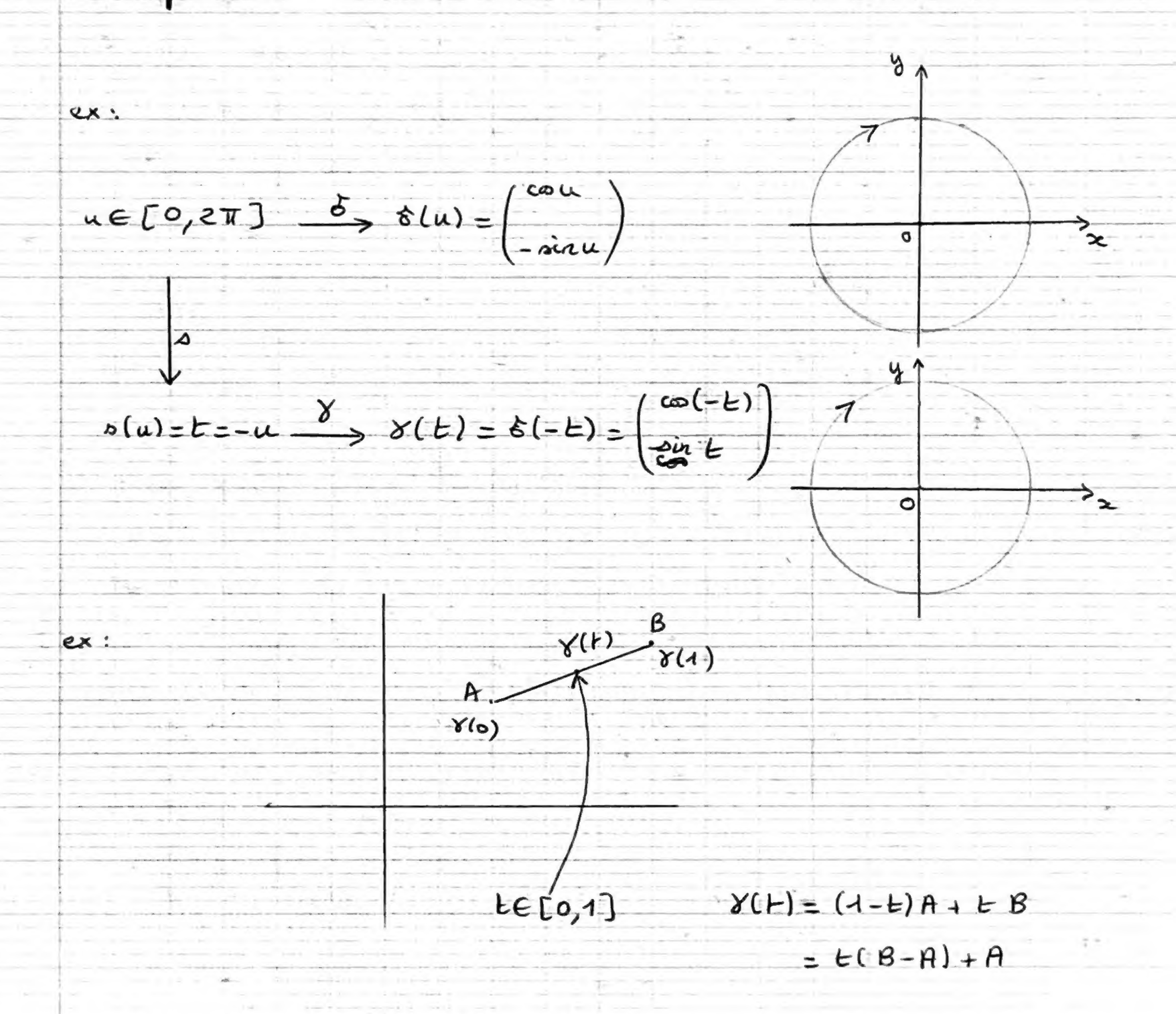
ex :

$u \in [0, 2\pi] \xrightarrow{\delta} \delta(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ -\sin u \end{pmatrix}$

$\downarrow s$

$s(u) = t = -u \xrightarrow{\gamma} \gamma(t) = \delta(-t) = \begin{pmatrix} \cos(-t) \\ \sin t \end{pmatrix}$

ex :



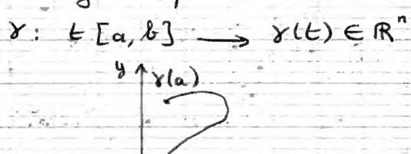

$\gamma(t) = (1-t)A + tB$
$= t(B-A) + A$

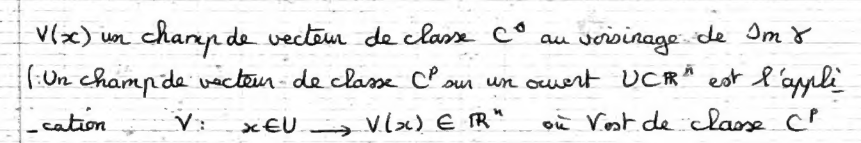
Intégrale curviligne

## 1°/ Définitions

Soit $\Gamma$ un arc géométrique orienté

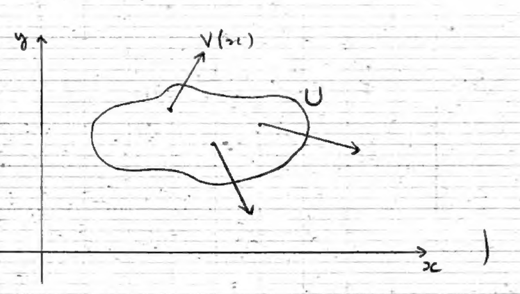
$$\gamma : t\,[a,b] \longrightarrow \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$$



$V(x)$ un champ de vecteur de classe $C^0$ au voisinage de $\mathrm{Im}\,\gamma$

(Un champ de vecteur de classe $C^p$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est l'application $V : x \in U \longrightarrow V(x) \in \mathbb{R}^n$ où $V$ est de classe $C^p$




)

**Def** On posera :

$$\int_\Gamma \overrightarrow{V(x)} . \overrightarrow{dx} = \int_a^b \overrightarrow{V(\gamma(t))} . \overrightarrow{\gamma'(t)}\, dt$$

Nous aurons donc :

$$\int_\Gamma \overrightarrow{V(x)}\, \overrightarrow{dx} = \int_a^b \left[ V_1(\gamma(t)) . x_1'(t) + \dots + V_n(\gamma(t))\, x_n'(t) \right] dt$$

Soit $\beta \sim \gamma$ avec même orientation

Il existe $s : t \in [a,b] \longrightarrow s = s(t) \in [c,d]$ $\quad s'(t) > 0$

tel que $\beta(s(t)) = \gamma(t)$

Alors

$$\int_c^d \vec{V}(\beta(s))\, \overrightarrow{\beta'(s)}\, ds = \int_a^b V(\underbrace{\beta(s(t))}_{\gamma(t)})\, \underbrace{\beta'(s(t))\, s'(t)}_{\gamma'(t)}\, dt$$

($c \to a$ : $s$ croissante)

où $s = s(t)$

Or $\beta \circ s(t) = \gamma(t) \Rightarrow \beta'(s(t)) \cdot s'(t) = \gamma'(t)$

(dérivation des fonctions composées)

L'intégrale curviligne ne ~~peut~~ dépend donc que de l'arc géométrique orienté.

Exemple :

$\Gamma$ = arc paramétré orienté

$\gamma : t \in [a, b] \longrightarrow \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$

$s(t) = -t$

$\gamma(a)$ $\gamma(b)$

$(-\Gamma) : s \in [-b, -a] \longrightarrow \beta(s) = \gamma(-s) \in \mathbb{R}^n$

A $(\Gamma)$ on a associé "l'arc paramétré inverse" $(-\Gamma)$

Alors :

$$\int_{-\Gamma} \vec{V}(x)\, \vec{dx} = - \int_{\Gamma} \vec{V}(x)\, \vec{dx} \qquad \text{(le vérifier !)}$$

2°/ Propriétés de $\int_\Gamma \vec{V} \cdot \vec{dx}$

$$V(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$$

Notation :

$$\int_\Gamma \vec{V}(x)\, \vec{dx} = \int_\Gamma P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy$$

$$V = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

$$\int_\Gamma A\,dx + B\,dy + C\,dz = \int_a^b \left[ A(M(t))x'(t) + B(M(t))\,y'(t) + C(M(t))\,z'(t) \right] dt$$

$$* \int_\Gamma (V+W)\,dx = \int_\Gamma V.dx + \int_\Gamma W\,dx$$

*

A C B $\Gamma_1$ $\Gamma_2$

$$\int_\Gamma V\,dx = \int_{\Gamma_1} V\,dx + \int_{\Gamma_2} V\,dx$$

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

$\Gamma : [a,b] \xrightarrow{\gamma} \gamma(t)$ $\int_a^b$

$\Gamma_1 : [a,c] \xrightarrow{\gamma} \gamma(t)$ $\int_a^c$

$\Gamma_2 : [c,b] \xrightarrow{\gamma} \gamma(t)$ $\int_c^b$

oui.

$V(\gamma(t))$

A $\gamma'(t)$ B

**Def** Un champ de vecteurs $\vec{V}(x)$ dérive d'un potentiel $f(x)$ sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ si

$$\vec{V} = \vec{\nabla} f$$

$f \in C^1(U)$ $\quad \vec{\nabla} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$

<u>Propriété</u> :

$$\int_\Gamma \vec{\nabla} f \, dx = f(B) - f(A)$$

$\gamma(a) = A$ $\qquad \gamma(b) = B$

En effet

$$\int_\Gamma \vec{\nabla} f(x) \cdot \vec{dx} = \int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \cdot x_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t)) x_n'(t) \right] dt$$

$$[a,b] \xrightarrow{\gamma} \gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

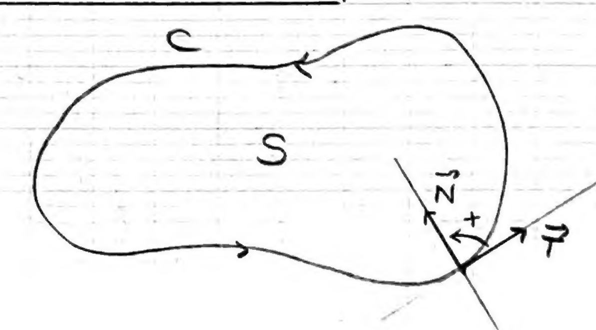
$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left( f(\gamma(t)) \right) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$
$$= f(B) - f(A)$$

Formule de Green dans le plan

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$(0,1)$ $\quad$ $\vec{E}$ orienté $\quad$ $+$

$(1,0)$

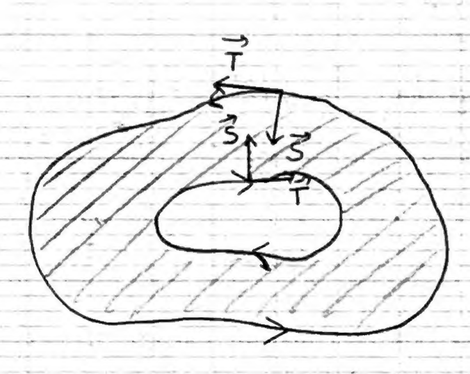


$$V(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$$ de classe $C^1$ dans un voisinage ouvert de $S$

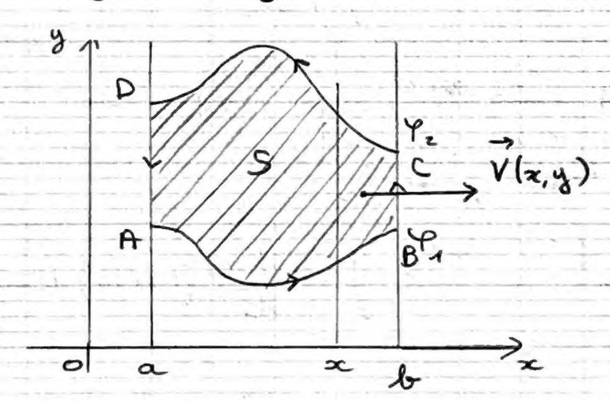
$\begin{cases} (\vec{T}) = \text{tangente} \\ \vec{N} = \text{vecteur normal intérieur} \end{cases}$.

~~$\vec{T}$ sera choisi tel que~~ $(\vec{T}, \vec{N})$ ~~soit~~ directe.

L'orientation de $\vec{E}$ donné par :




a) Cas des régions de type I




$$S = \begin{cases} \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$$

$\varphi_1$ et $\varphi_2$ de classe $C^1$ sur $]a, b[$

$C^0$ sur $[a, b]$

On suppose $V(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$

Calculons :

$$\int_C P\,dx = \int_{\overrightarrow{AB}} + \underbrace{\int_{\overrightarrow{BC}}}_{= 0} + \int_{\overrightarrow{CD}} + \underbrace{\int_{\overrightarrow{DA}}}_{= 0}$$

$\overset{\frown}{AB}$ : $x \in [a, b] \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ \varphi_1(x) \end{pmatrix}$

$\overset{\frown}{CD}$ : $x \in [b, a] \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}$

$$\int_C P\,dx = \int_a^b P(x, \varphi_1(x))\,dx + \int_b^a P(x, \varphi_2(x))\,dx$$

$$= \int_a^b \left[P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x))\right] dx$$

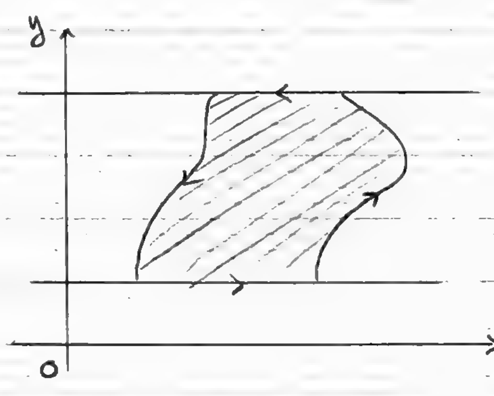
D'autre part :

$$-\iint_S \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = -\int_a^b \Bigg( \underbrace{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy}_{P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))} \Bigg) dx$$

b) La région S se découpe en un nombre fini de régions de type I et $V = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$

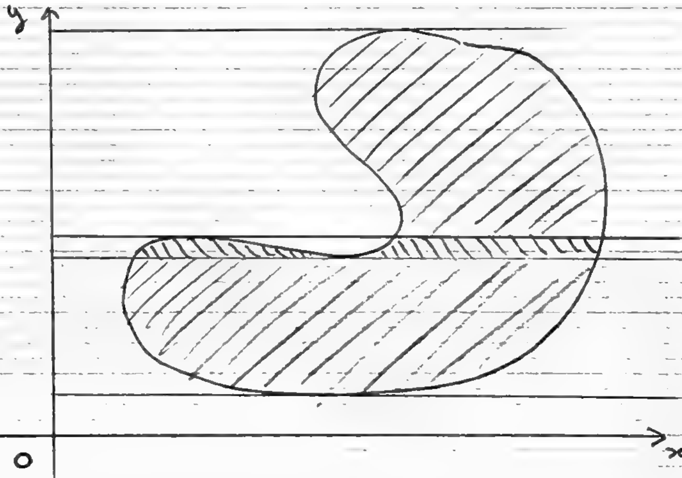
$$\iint_S -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3} + \iint_{S_4} = \int_C P\,dx$$

c) Cas des régions de type II et $V = \begin{pmatrix} 0 \\ Q \end{pmatrix}$




$$\begin{cases} \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases}$$

d) La région S se découpe en un nbre fini de régions du type II et $V = \begin{pmatrix} 0 \\ Q \end{pmatrix}$



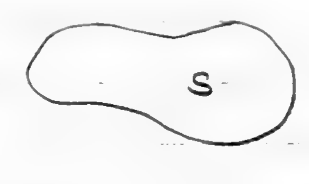

**Def** S est dite admissible si l'on peut la décomposer en un nombre fini de régions de type I ainsi qu'en régions du type II.

Th | $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$ (faux)

où S est une région admissible.

Application 1 : Soit V le champ de vecteurs tel que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ sur S.
alors $\int_C \vec{V} \cdot \vec{dx}$

Application 2 : Calcul d'aire



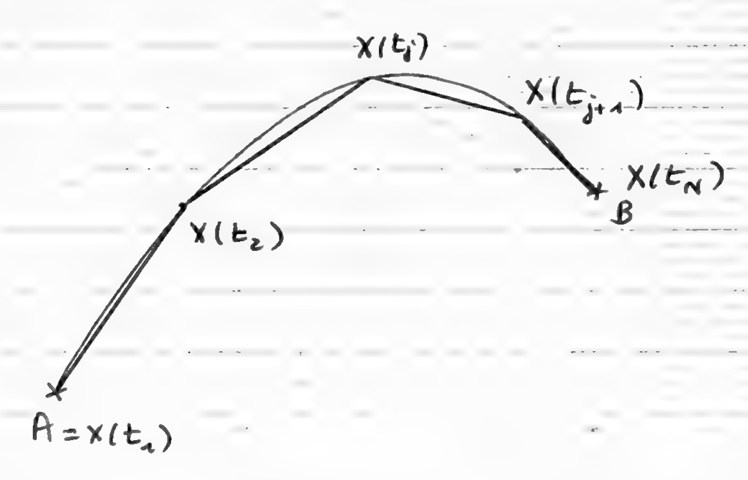

$\text{Aire}(S) = \iint_S dx\,dy$

Si S est admissible alors $= \oint_C x\,dy = -\int_C y\,dx$
Alors :

~~$\int_C y\,dx$~~

$$\iint_S dx\,dy = \frac{1}{2} \int_C (x\,dy - y\,dx)$$

Longueur d'un arc de courbe dans $\mathbb{R}^n$




Soit un paramétrage $C^1$ : $t \in [a, b] \to X(t) \in C$

pas de la subdivision de $[a,b] = \sup_j (t_{j+1} - t_j) = \delta$

Le long de la ligne polygonale $= \sum_{j=1}^{N-1} \| X(t_{j+1}) - X(t_j) \|$

**Def** | Si la longueur des lignes polygonales inscrites admet une limite quand le pas $\delta \to 0$, cette limite est appelée longueur de C

**Th** | Soit C une courbe de classe $C^1$, alors la limite existe et

$$I = \text{longueur}(C) = \int_a^b \| X'(t) \| \, dt$$

En effet :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_0 \quad \delta \leq \delta_0 \Rightarrow \left| \sum_1^{N-1} \| X(t_{j+1}) - X(t_j) \| - I \right| \leq \varepsilon$

$\varepsilon > 0$

1) $\exists \delta_1 \; / \quad \delta \leq \delta_1 \Rightarrow \left| I - \sum_1^{N-1} (t_{j+1} - t_j) \underbrace{\| X'(t_j) \|}_{f(t_j)} \right| \leq \varepsilon$

(théorie de l'intégrale)

2) $\exists \delta_2 \; / \quad \| X'(t) - X'(s) \| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall t, s$ dès que $|t - s| \leq \delta_2$

(continuité uniforme de $X'(t)$)

3)

$\| X(t_{j+1}) - X(t_j) - (t_{j+1} - t_j) X'(t_j) \| \leq (t_{j+1} - t_j) \sup_{t_j \leq s \leq t_{j+1}} \| X'(s) - X'(t_j) \|$

$t_j \leq s \leq t_{j+1}$

En effet : $\| \vec{f}(t) - \vec{f}(s) \| \leq |t - s| \sup_{s \leq u \leq t} \| f'(u) \|$

$f(s) = X(s) - s \, X'(t_j)$

$\| f(t_{j+1}) - f(t_j) \| \leq (t_{j+1} - t_j) \sup_{t_j \leq s \leq t_{j+1}} \| f'(s) \|$

2) et 3) $\Rightarrow$

$\delta \leq \delta_2 \qquad \| X(t_{j+1}) - X(t_j) - (t_{j+1} - t_j) X'(t_j) \| \leq (t_{j+1} - t_j) \frac{\varepsilon}{b-a}$

Inégalité triangulaire : $\Downarrow$

$$\Big| \| X(t_{j+1}) - X(t_j) \| - (t_{j+1} - t_j) \| X'(t_j) \| \Big| \leq (t_{j+1} - t_j) \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\left| \left( \sum_1^{N-1} \| X(t_{j+1}) - X(t_j) \| \right) - \left( \sum_1^{N-1} (t_{j+1} - t_j) \| X'(t_j) \| \right) \right| \leq \varepsilon$$

1) $\Rightarrow \quad \delta < \delta_1$ et $\delta_2$

Alors

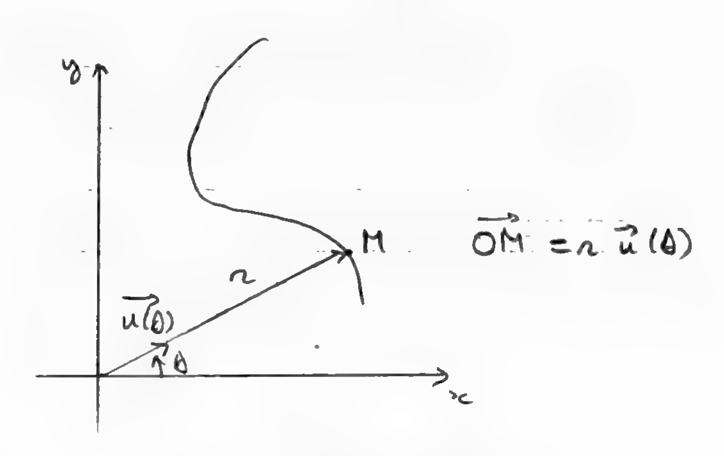
$$\left| I - \sum_1^{N-1} \| X(t_{j+1}) - X(t_j) \| \right| \leq 2\varepsilon$$

Exemple : (courbe de A à B)

$$\text{longueur } \overset{\frown}{AB} = \int_a^b \| X'(t) \| \, dt = \int_a^b \sqrt{[x_1'(t)]^2 + \dots + (x_n'(t))^2} \, dt$$

$$= \int_a^b ds$$

où $ds = \sqrt{x_1'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2} \, dt$




$\vec{OM} = r \, \vec{u}(\theta)$

$t \in [a, b] \longrightarrow X(t) = r(t) \, \vec{u}(\theta(t))$

$$\| X'(t) \| = \left\| r'(t) \, \vec{u}(\theta(t)) + r(t) \frac{d\vec{u}}{d\theta} \theta'(t) \right\|$$

$X'(t) = r'\vec{u} + r.\theta'.\vec{v}$ $\vec{v}$ directement orthogonal à $\vec{u}$

TB
$$ds = \sqrt{r'^2 + r^2(\theta')^2}\ dt$$
Cas particulier : $\theta = t$ alors $l = \int_{\theta=\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r'^2_\theta + r^2_\theta}\ d\theta$

Majoration d'une intégrale curviligne

$$\int_C \vec{V}(x)\,\vec{dx} = \int_a^b \vec{V}(X(t)).\vec{X'}(t)\ dt$$

$$|\vec{V}.\vec{W}| \leq \|\vec{V}\|\ \|\vec{W}\|$$

Donc

$$\left| \int_a^b \vec{V}(x)\,\vec{dx} \right| \leq \int_a^b \|\vec{V}(x)\|.\|\vec{X'}(t)\|\,dt$$

$$\leq \int_a^b \|\vec{V}(x)\|\ ds \leq M \int_a^b \|X'(t)\|\,dt$$

$$= M.\,\text{long}(C)$$

où $M = \sup_{x\in C} \|V(x)\|$

Ainsi :

$$\left| \int_C \vec{V}(x)\,\vec{dx} \right| \leq \left\{ \sup_{x\in C} \|V(x)\| . \text{long}(C) \right.$$

Longueur d'un arc $AB = \int_a^b \|X'(t)\|\,dt = \ell$

(figure : courbe (C) allant de A à B, passant par $X(t)$)

$t \in [a,b] \longrightarrow X(t) \in (C)$

On définit $s(t) = \text{long}\ AX(t) = \int_a^t \|X'(\alpha)\|\,d\alpha$

$t \in [a, b] \longrightarrow s(t) \in [0, \ell]$

$$s'(t) = \| X'(t) \| > 0$$

$t \to s$ est bijective $C^1$ entre $[a, b]$ et $[0, \ell]$

On peut paramétrer (C) par $s$ :

$$s \in [0, \ell] \longrightarrow \underbrace{\overbrace{X(t(s))}^{Y(s)}}_{} \in C$$

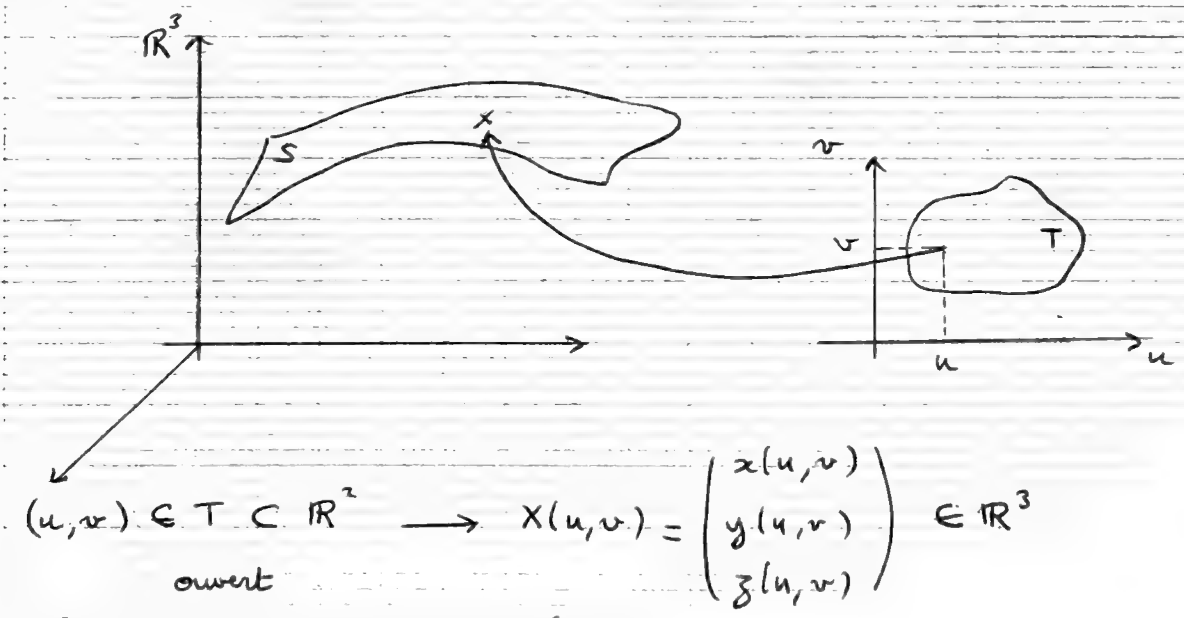
point tel que $AX = s$

$$Y'(s) = X'(t(s)) \cdot t'(s)$$
$$= X'(t(s)) \cdot \frac{1}{s'(t)}$$

~~$Y'(s) = \|X'(t)\| > 0$~~ $\quad Y'(s) = \dfrac{X'(t(s))}{\|X'(t(s))\|}$ est unitaire.

$$\text{long } \widehat{AB} = \int_0^\ell \| Y'(s) \| \, ds = \int_0^\ell s \, ds = \ell$$

Intégrales de surface

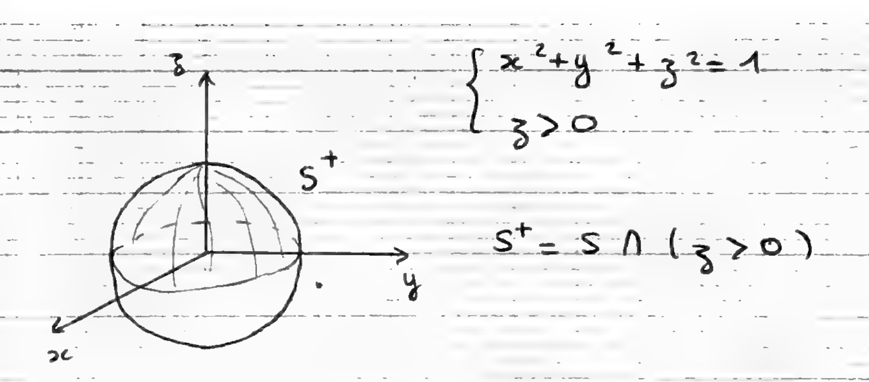



$$(u, v) \in T \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow X(u, v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ouvert

(Élément de surface paramétré)



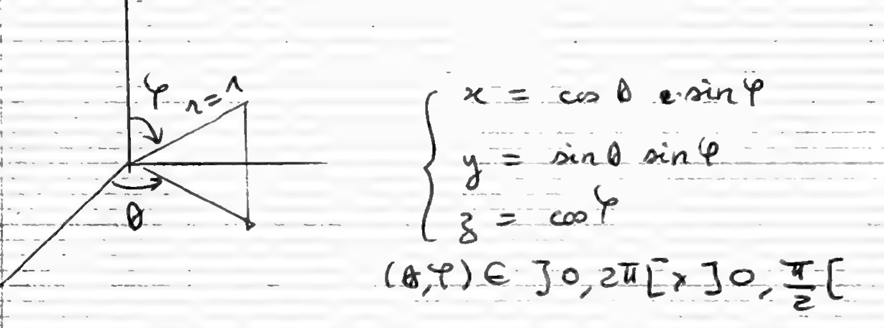



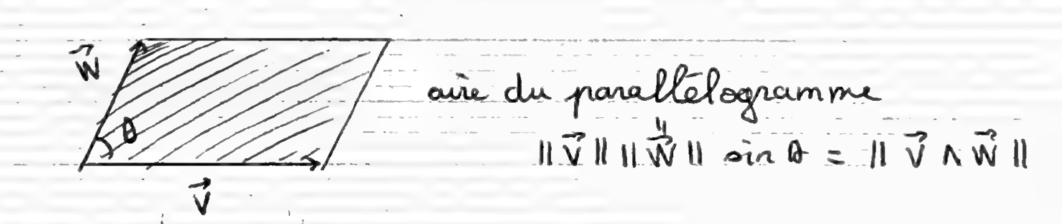

$z^2 = 1 - x^2 - y^2$

$z = +\sqrt{1-x^2-y^2}$ avec $(x,y) \in$ disque unité ouvert $(0,1)$

On a paramétré $S^+$ par $(x,y) \in T$

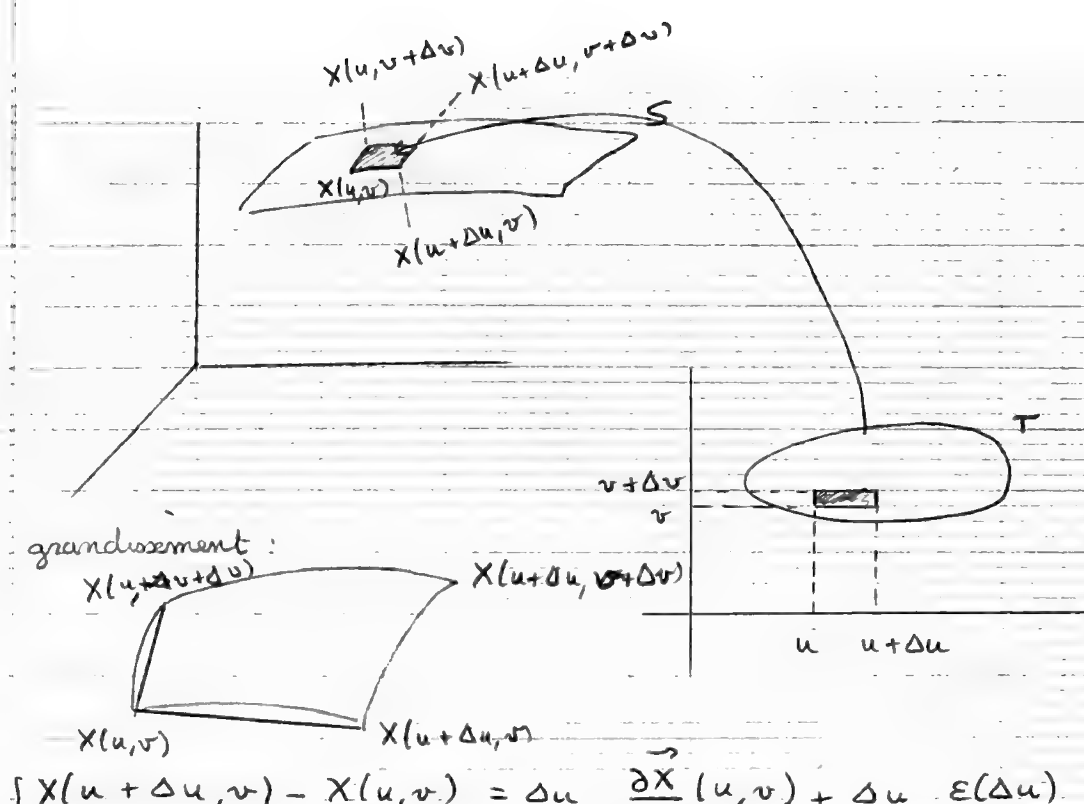
$$(x,y) \in T \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix}$$




**Def** : Soit un élément de surface $S$ / $(u,v) \in T \to X(u,v) \in \mathbb{R}^3$ de classe $C^1$

$$\text{aire de } S = \iint_T \left\| \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv$$




$$\begin{cases} X(u+\Delta u, v) - X(u,v) = \Delta u \ \dfrac{\partial \vec{X}}{\partial u}(u,v) + \Delta u \ \varepsilon(\Delta u) \\ X(u, v+\Delta v) - X(u,v) = \Delta v \ \dfrac{\partial X}{\partial v}(u,v) + \Delta v \ \varepsilon(\Delta v) \end{cases}$$

Aire approchée du rectangle déformé : $\left\| \dfrac{\partial X}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial X}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v$

Aire approché de $S = \sum = \displaystyle\iint_T \left\| \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv$

Exemple

$$X(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

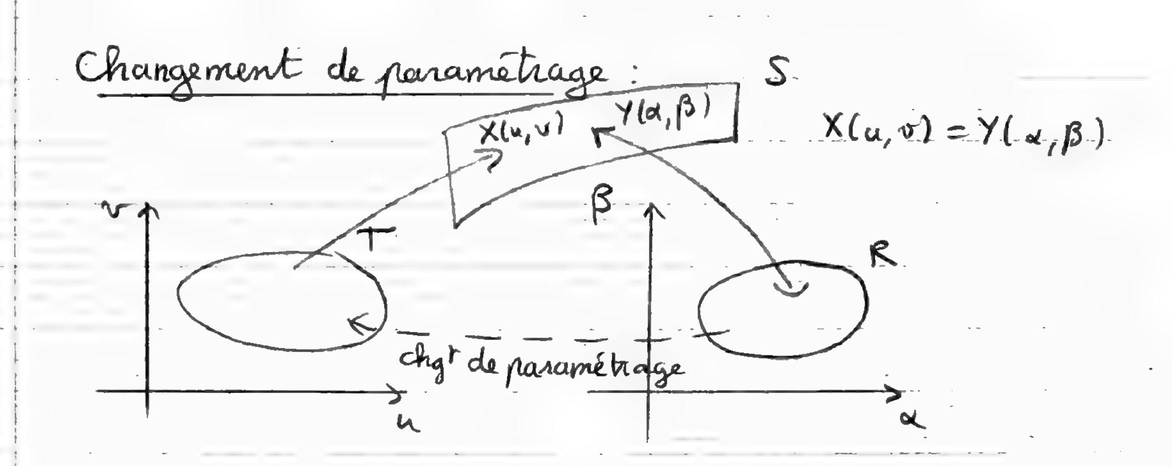
$$\frac{\partial X}{\partial x} \wedge \frac{\partial X}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

aire de $S = \displaystyle\iint_T \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} \, dx\, dy$

$\frac{\partial X}{\partial u}$ et $\frac{\partial X}{\partial v}$ = vecteurs ~~orthogonaux~~ tangents ~~au plan~~ à la surface.

Donc $\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}$ sera la normale à la surface.

<u>Changement de paramétrage</u> :




$$\begin{cases} \text{Aire } S = \iint_T \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\| du\, dv \\ \text{Aire } S = \iint_R \left\| \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \wedge \frac{\partial Y}{\partial \beta} \right\| d\alpha\, d\beta \end{cases}$$

On a :

$$\iint_T \left\| \frac{\partial X}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\| du\, dv$$

$$\left.\begin{array}{l} u = u(\alpha,\beta) \\ v = v(\alpha,\beta) \end{array}\right\} \text{chg}^t \text{ variables}$$

$$\iint_R \left\| \frac{\partial X}{\partial u}\big(u(\alpha,\beta), v(\alpha,\beta)\big) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u,v) \right\| \left| \frac{D(u,v)}{D(\alpha,\beta)} \right| d\alpha\, d\beta \qquad (1)$$

$$Y(\alpha,\beta) = X\big(u(\alpha,\beta), v(\alpha,\beta)\big)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial \alpha}(\alpha,\beta) = \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial X}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial Y}{\partial \beta}(\alpha,\beta) = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial X}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \beta} \end{cases}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha} \wedge \frac{\partial Y}{\partial \beta} = \underbrace{\frac{D(u,v)}{D(\alpha,\beta)}}\left(\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}\right)$$

tous calculs faits ! car $\frac{D(u,v)}{D(\alpha,\beta)} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha}$

(1) donne : $\iint_R \left\| \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \wedge \frac{\partial Y}{\partial \beta} \right\| \frac{1}{\left|\frac{D(u,v)}{D(\alpha,\beta)}\right|} \left|\frac{D(u,v)}{D(\alpha,\beta)}\right| d\alpha\, d\beta$

<u>Notation :</u>

$d\sigma \doteq \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\| du\, dv$

aire $S = \iint_T d\sigma$

$f : S \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\iint_S f\, d\sigma = \iint_T f(X(u,v)) \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\| du\, dv$$

ex : flux d'un champ de vecteurs à travers un él. S avec une normale orientée

$N^+ =$ normale orientée unitaire

$$(\text{flux de } V) = \iint_S \vec{V}(x)\, \overrightarrow{N^+}(x)\, d\sigma$$

$$N(X(u,v)) = \frac{\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\|}$$

① Parmi les formes différentielles suivantes, lesquelles sont des différentielles totales ? Indiquer alors de quelle fonction.

a) $x\,dy - y\,dx$ b) $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{xy}$ c) $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$

② Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} -\frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{y}\,dy$ $A\binom{2}{2}$ $B\binom{1}{1}$

b) $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} \frac{1}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy$ $A\binom{2}{2}$ $B\binom{0}{4}$

---

① a) $\dfrac{\partial(-y)}{\partial y} = -1$ et $\dfrac{\partial(x)}{\partial x} = 1$. Ces 2 différentielles ne sont pas égales, donc la forme différentielle $\omega = x\,dy - y\,dx$ n'est pas fermée.

On sait (Cachy Ezra 67, p 83) que si $\omega$ est définie sur un rectangle, $\omega$ fermée (ie $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ si $\omega = P\,dx + Q\,dy$) équivaut à $\omega$ exacte (ie "totale", ie $\exists f \,/\, \omega = df$).

Ccl : $x\,dy - y\,dx$ n'est pas une différentielle exacte.

NB : Calcul direct possible. Supposons $df = x\,dy - y\,dx$.

Alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -y \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = -yx + k(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = xy + \ell(x) \end{cases}$$

donc $k(y) = 2xy + c(x)$

Prenons $x = 0$. On obtient $k(y) = c(0)$ donc $k(y) = \text{cte}$ $\forall y$, et :

$$\text{cte} = 2xy + c(x)$$

Pour $x \neq 0$, faisons tendre $y$ vers $+\infty$ : absurdité ! Donc pas de $f$ tq $df = \omega$.
ie $f$ n'est pas une forme différentielle exacte.

b) Ici $\omega = P\,dx + Q\,dy$ avec $P = -\frac{1}{x}$ et $Q = \frac{1}{y}$, donc $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$
et $\omega$ sera exacte (sur tout rectangle de $\mathbb{R}^2$, soit ici sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{xy=0\}$.

Recherche de $f$ tq $df = \omega$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x} & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} & (2) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow$ $f = -\ln|x| + k(y)$ et en reportant dans (2) :

$$k'(y) = \frac{1}{y} \Rightarrow k(y) = \ln|y| + c \qquad (c = \text{cte})$$

Ainsi, si $df = \omega$, alors $f(x,y) = -\ln|x| + \ln|y| + c = \ln\frac{|y|}{|x|} + c$

Réc., vérifions que $\boxed{f = \ln\frac{|y|}{|x|} + c}$ satisfait $df = \omega$ :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{1}{\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)dx + \frac{1}{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}dy = \omega$$

CQFD

c) $\omega = P\,dx + Q\,dy$ avec $P = \frac{1}{y}$ et $Q = -\frac{x}{y^2}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \omega \text{ est exacte sur tout disque (resp. rectangle) ne rencontrant pas l'axe } y=0.$$

On aura :

$$df = \omega \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} \Rightarrow f = \frac{x}{y} + k(y) & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} & (2) \end{cases}$$

En reportant (1) dans (2) :

$$-\frac{x}{y^2} + k'(y) = -\frac{x}{y^2} \Rightarrow k'(y) = 0 \rightarrow k(y) = \text{cte}$$

Donc $\boxed{f(x,y) = \frac{x}{y} + \text{cte}}$

(2) Les 2 formes différentielles que l'on intègre sont exactes car vérifient $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, sur chacun des rectangles où elles sont définies. Donc :

$$I = \int_{\widehat{AB}} -\frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{y}\,dy = \int_{\widehat{AB}} df = f(B) - f(A)$$

où $df = -\frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{y}\,dy$.

On a $f = \ln \frac{|y|}{|x|} + c$ d'après (1) b), donc

$$I = f(1,1) - f(2,2) = 0$$

* De même, d'après (1)

$$J = \int_{\widehat{AB}} \frac{1}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy = \int_{\widehat{AB}} dg = g(B) - g(A)$$

où $g = \frac{x}{y} + c$.

$$J = g(0,4) - g(2,2) = -1$$

**Quelques idées : Interprétation de $\int_C \omega$**

$\omega = P\,dx + Q\,dy$

$C$ = chemin de $\mathbb{R}^2$ défini par $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dérivable.

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Par définition :

$$\int_C \omega = \int_C P\,dx + Q\,dy \doteq \int_{t=0}^{1} \Big[ P(x(t),y(t))\, x'(t) + Q(x(t),y(t))\, y'(t) \Big] dt$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\begin{pmatrix} P(\gamma(t)) \\ Q(\gamma(t)) \end{pmatrix}}_{\vec{\Gamma}(M(t))} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}}_{\doteq \vec{V}(t)} dt \qquad (*)$$

$\vec{V}(t)$ = vecteur vitesse en $M(t) \doteq \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \gamma(t)$

$\vec{\Gamma}(M(t))$ = valeur en $M(t) = \gamma(t)$ du champ de vecteur défini par $\omega$

Car se donner $\omega$ ou se donner un champ de vecteurs revient au même, vu la correspondance

1-forme différentielle $\longleftrightarrow$ champ de vecteur

$\omega(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \longleftrightarrow \vec{\Gamma}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$

Interprétation de (*) :

$\vec{V}(t)$
E
H
M(t)
B
C
A
$\vec{\Gamma}(M(t))$

(*) exhibe le produit scalaire $\vec{\Gamma}(M(t)) \cdot \vec{V}(t) = \overline{M(t)H} \cdot \overline{M(t)E}$ qui

sera d'autant plus grand et positif que $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ sont dans la même direction, ~~et~~ d'autant plus négatif que $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ ne sont pas dans la $\hat{m}$ direction.

L'intégrale $\int_C \omega$ mesure, en quelque sorte, la facilité (ou la difficulté) de circuler pour notre point $M(t)$, allant de A vers B en suivant C, et dans le champ de vecteur $\vec{\Gamma}$.
(Penser à $\vec{\Gamma}$ comme à un champ de vecteurs force qui attire le mobile)

<u>On a mesuré la circulation du champ de vecteur $\vec{\Gamma}$ le long de C.</u>

([M] Couty-Ezra 67, pp 332-339)

<u>Autre interprétation de (*)</u> :

$W = Pt$ = travail   $P$ = puissance
Puissance d'une force sur un déplacement $\vec{\Delta d}$ : $\vec{F}.\vec{\Delta d}$

Donc :

$$\Delta W = \vec{F}.\vec{\Delta d} = \vec{F}.\frac{\vec{\Delta d}}{\Delta t}.\Delta t$$

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = \vec{F}.\frac{\vec{\Delta d}}{\Delta t}$$

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$

$$W = \int_a^b \vec{F}.\vec{v}\,dt = \int_\gamma \omega\,dt$$ où $\omega = \vec{F}.\vec{v}$ (comme ci-dessus).

‖ La circulation du champ $\vec{F}$ le long de $\gamma$ est le travail fourni par cette force le long du chemin $\gamma$.

Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

1°/ $\int_C (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$

a) Pour C = arc de cercle $x(t)=\cos t$, $y(t)=\sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

b) Pour C = segment joignant $A(1,0)$, $B(0,1)$

2°/ $\int_C xy\,dx + (x+y)\,dy$ où C est l'arc $\overrightarrow{AB}$ de la parabole $y=x^2$ avec $A(-1,1)$ et $B(2,4)$

---

1°/ a) $I \doteq \int_0^{\pi/2} \left( (\cos t + \sin t)(-\sin t) + (\cos t - \sin t)\cos t \right) dt$

$= \int_0^{\pi/2} \cos 2t - \sin 2t \, dt = \left[ \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\cos 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = -1$

b) On paramètre le segment $[AB]$ par $M(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$

$J \doteq \int_0^1 ((1-t)+t)(-1) + ((1-t)-t) \; dt$

$= \int_0^1 -2t \, dt = \left[ -t^2 \right]_0^1 = -1$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} B$

M(t) = bary. de A (1-t), B(t)

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Autre méthode :

Posons $\omega = (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$. Est-ce une forme différentielle exacte ?
Cherchons $f$ tq $\omega = df$, ie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x+y & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x-y & (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow f = \frac{x^2}{2} + yx + k(y)$ et en reportant dans (2) :

$x + k'(y) = x - y \Rightarrow k'(y) = -y \Rightarrow k(y) = -\frac{y^2}{2} + c \qquad c \in \mathbb{R}$

$\omega$ est exacte, et $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{2} + xy + c$.

Donc $$\int_{\widehat{AB}} \omega = \int_{\widehat{AB}} df = f(B)-f(A) = f(0,1) - f(1,0) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

pour tous les chemins d'extrémités A et B allant de A vers B !

2°/

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$$

$$I = \int_{t=-1}^{2} \left[ t^3 + (t+t^2)2t \right] dt$$

$$= \int_{-1}^{2} (3t^3 + 2t^2)\, dt$$

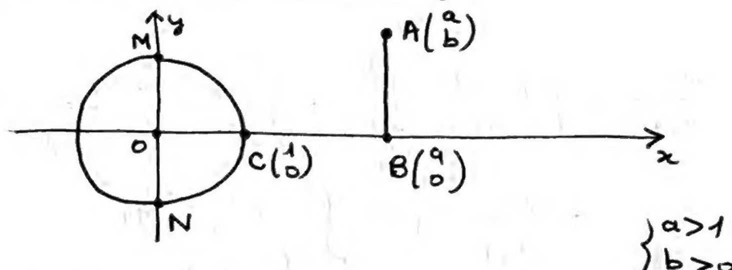
$$= \left[ \frac{3}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 \right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{69}{4}$$

Calculer l'intégrale curviligne :

$$I = \int_\Gamma \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left( \left(x \ln(x^2+y^2) - x^2 y\right)dx + \left(y \ln(x^2+y^2) + x^3\right) dy \right)$$

le long du contour CMNCBA ci-dessous :




$\begin{cases} a > 1 \\ b > 0 \end{cases}$

(réf. E.S.T.P et Serfati III. 6.3)

* **Sur le cercle** : $C \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$

$$I_1 = \int_C -\cos^2 t \sin t\,(-\sin t) + \cos^3 t \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \pi$$

* **Sur CB** : $\begin{cases} x(t) = t \in [1, a] \\ y(t) = 0 \end{cases}$

$$I_2 = \int_1^a \frac{t \ln t^2}{t^4}\, dt = 2\int_1^a \frac{\ln t}{t^3}\, dt = 2\left( \left[ \ln t \cdot \frac{t^{-2}}{-2} \right]_1^a - \int_1^a \frac{1}{t} \cdot \frac{t^{-2}}{-2}\, dt \right)$$

après calculs : $I_2 = -\dfrac{\ln a}{a^2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2a^2}$

* **Sur BA** : $\begin{cases} x(t) = a \\ y(t) = t \in [0, b] \end{cases}$

$$I_3 = \int_0^b \frac{t \ln(a^2+t^2) + a^3}{(a^2+t^2)^2}\, dt = \underbrace{\int_0^b \frac{t \ln(a^2+t^2)}{(a^2+t^2)^2}\, dt}_{J_1} + a^3 \underbrace{\int_0^b \frac{1}{(a^2+t^2)^2}\, dt}_{J_2}$$

**Calcul de $J_1$** : Intégration par parties,

$$J_1 = \left[ -\frac{1}{2(a^2+t^2)} \ln(a^2+t^2) \right]_0^b - \int_0^b -\frac{1}{2(a^2+t^2)} \cdot \frac{2t}{a^2+t^2}\, dt$$

$$= \frac{\ln a^2}{2a^2} - \frac{\ln(a^2+b^2)}{2(a^2+b^2)} + \underbrace{\int_0^b \frac{t}{(a^2+t^2)^2}\, dt}$$

$$\left[ -\frac{1}{2} \frac{1}{a^2+t^2} \right]_0^b = -\frac{1}{2(a^2+b^2)} + \frac{1}{2a^2}$$

d'où $J_1 = \frac{\ln a}{a^2} - \frac{\ln(a^2+b^2)}{2(a^2+b^2)} + \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2(a^2+b^2)}$

Calcul de $J_2$ :

Par int. par parties : $\int_0^b \frac{dt}{a^2+t^2} = \left[ t \frac{1}{a^2+t^2} \right]_0^b - \int_0^b t \cdot \frac{-2t}{(a^2+t^2)^2} dt$

$$= \frac{b}{a^2+b^2} + 2 \underbrace{\int_0^b \frac{t^2}{(a^2+t^2)^2} dt}_{= \int_0^b \frac{1}{a^2+t^2} dt - a^2 \int_0^b \frac{1}{(a^2+t^2)^2} dt}$$

d'où $\int_0^b \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{b}{a^2+b^2} + 2\int_0^b \frac{dt}{a^2+t^2} - 2a^2 \int_0^b \frac{dt}{(a^2+t^2)^2}$

$$J_2 = \int_0^b \frac{dt}{(a^2+t^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \Big( \underbrace{\int_0^b \frac{dt}{a^2+t^2}}_{\left[\frac{1}{a} \text{Arctg} \frac{t}{a}\right]_0^b = \frac{1}{a} \text{Arctg} \frac{b}{a}} + \frac{b}{a^2+b^2} \Big) = \frac{1}{2a^3} \text{Arctg} \frac{b}{a} + \frac{b}{2a^2(a^2+b^2)}$$

En remplaçant, on obtient $I_3$ :

$$I_3 = J_1 + a^3 J_2 = \frac{\ln a}{a^2} - \frac{\ln(a^2+b^2)}{2(a^2+b^2)} + \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2(a^2+b^2)} + \frac{1}{2} \text{Arctg} \frac{b}{a} + \frac{ab}{2(a^2+b^2)}$$

Ccl :

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + I_3 = \pi + \frac{1}{2} - \frac{\ln(a^2+b^2)}{2(a^2+b^2)} - \frac{1}{2(a^2+b^2)} + \frac{ab}{2(a^2+b^2)} + \frac{1}{2} \text{Arctg} \frac{b}{a}}$$

NB : On aurait pu passer en polaire. C'est fait ou Serfati III.6.3.

Posons $\omega_1 = x \ln(x^2+y^2)\, dx + y \ln(x^2+y^2)\, dy$. Soit $P : \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix}$ le chgt de coord. en polaire, on a :

$$\int_\Gamma \omega_1 = \int_{\Gamma_1 = P^{-1}(\Gamma)} P^* \omega_1$$ où $P^*\omega_1$ est le pull-back de $\omega_1$.

On obtient $P^*\omega_1$ en remplaçant $x$ et $y$ par $\rho\cos\theta$ et $\rho\sin\theta$ dans $\omega_1$ :

$$P_1^*\omega_1(\rho,\theta) = \rho\cos\theta \ln\rho^2 \underbrace{d(\rho\cos\theta)}_{\cos\theta\, d\rho - \rho\sin\theta\, d\theta} + \rho\sin\theta \ln\rho^2 \underbrace{d(\rho\sin\theta)}_{\sin\theta\, d\rho + \rho\cos\theta\, d\theta}$$

$= \dots = 2\rho \ln\rho\, d\rho$ et ainsi de suite ...